Voici deux exemples canoniques des espaces de Hilbert:

Exemple: Nous définissons $L^2[a,b]$ comme l'ensemble des fonctions mesurables sur $[a,b]$, à valeurs complexes, et satisfaisant:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty .$$

Nous y définissons un produit scalaire par:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx \quad \forall f, g \in L^2[a,b]$$

On remarque que ce produit scalaire est bien défini, car:

$$|\overline{f(x)} g(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|^2 + \frac{1}{2}|g(x)|^2$$

$$\Rightarrow \overline{f} g \in L^1[a,b].$$

On peut démontrer que $L^2[a,b]$ est complet; i.e. il est un espace de Hilbert. En fait, il est la complétion de $C[a,b]$ par rapport à la norme

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Exemple: Nous définissons ℓ_2 comme l'ens. des suites $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres complexes satisfaisant

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

avec un produit scalaire défini par:

$$\langle \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n .$$

ESPACES DE HILBERT

Définition: Si $\mathcal{P}$ est un e.v. sur $\mathbb{C}$, un **produit scalaire** sur $\mathcal{P}$ est une application

$$(f,g) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longmapsto \langle f,g \rangle \in \mathbb{C}$$

possédant les propriétés suivantes:

i) **Sesquilinéarité:** Le produit scalaire est anti-linéaire par rapport à la 1ère var. et linéaire par rapport à la seconde:

$$\langle f_1+f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$$

$$\langle \lambda f, g \rangle = \bar{\lambda} \langle f,g \rangle \; ; \; \langle f, \lambda g \rangle = \lambda \langle f,g \rangle$$

ii) **Symétrie hermitienne:** $\overline{\langle f,g \rangle} = \langle g,f \rangle$

iii) **Positivité:** Le produit scalaire est **défini positif**: On a $\langle f,f \rangle \geq 0 \; \forall f \in \mathcal{P}$, et

$$f \neq 0 \Leftrightarrow \langle f,f \rangle > 0$$

Un e.v. muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien**. Il est canoniquement muni d'une structure d'e.v.n. en posant

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f \rangle}$$

Nous démontrerons plus loin que tout espace préhilbertien $\mathcal{P}$ est un e.v.n. avec la norme définie ci-dessus.

Rmq: Comme dans tout e.v.n., les applications $(f,g) \longmapsto f+g$, $(\lambda,f) \longmapsto \lambda f$ et $f \longmapsto \|f\|$ sont

continues. En outre, dans $\mathcal{P}$ nous avons la <u>continuité du produit scalaire:</u>

Si $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{} f$ et $g_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{} g$, alors

$$\langle f_n, g_n \rangle \longrightarrow \langle f, g \rangle$$

Nous la démontrerons un peu + loin.

<u>Exemple 1:</u> $\mathbb{C}^n$: l'ensemble des n-uples des nombres complexes. Pour $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $y = \{y_1, \dots, y_n\}$ dans $\mathbb{C}^n$ on définit:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j}\, y_j$$

<u>Exemple 2:</u> Soit $\mathcal{C}[a,b]$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexe et continues sur l'intervalle $[a,b]$. $\forall f, g \in \mathcal{C}[a,b]$ on définit:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

<u>Déf°:</u> Deux vecteurs f, g de l'espace préhilbertien $\mathcal{P}$ s'appellent <u>orthogonaux</u> si

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

Une collection $\{f_j\}_{j \in I}$ de vecteurs dans $\mathcal{P}$ s'appelle un <u>ensemble orthonormé</u> si

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in I.$$

Théorème (de Pythagore): Soit $\{f_j\}_{j\in[\![1,N]\!]}$ un ensemble orthonormé dans un espace préhilbertien $\mathcal{P}$. Alors, $\forall f\in\mathcal{P}$:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle f, f_n\rangle|^2 + \|f - \sum_{n=1}^{N}\langle f_n, f\rangle f_n\|^2.$$

Démonstration: On a

$$f = \underbrace{\sum_{n=1}^{N}\langle f_n, f\rangle f_n}_{a} + \underbrace{\left(f - \sum_{n=1}^{N}\langle f_n, f\rangle f_n\right)}_{b}$$

On vérifie que $a\perp b$. Donc:

$$\|f\|^2 = \|\sum_{n=1}^{N}\langle f_n, f\rangle f_n\|^2 + \|f - \sum_{n=1}^{N}\langle f_n, f\rangle f_n\|^2$$

$$= \sum_{n,m=1}^{N}\overline{\langle f_n, f\rangle}\langle f_m, f\rangle\underbrace{\langle f_n, f_m\rangle}_{\delta_{nm}} + \|f - \sum_{n=1}^{N}\langle f_n, f\rangle f_n\|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{N}|\langle f_n, f\rangle|^2 + \|f - \sum_{n=1}^{N}\langle f_n, f\rangle f_n\|^2 \qquad \blacksquare$$

Corollaire 1: (Inégalité de Bessel) Soit $\{f_n\}_{n\in I}$ un ensemble o.n. dans un espace préhilbertien $\mathcal{P}$. Alors, $\forall f\in\mathcal{P}$:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=1}^{N}|\langle f_n, f\rangle|^2$$

Corollaire 2: (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Si $f, g\in\mathcal{P}$, alors

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|$$

Démonstration: Le cas $g=0$ est trivial. Supposons donc $g \neq 0$. Le vecteur $\{g/\|g\|\}$ par lui-même forme un ens. o.n. Alors, en utilisant l'inégalité de Bessel, on a:

$$\|f\|^2 \geq |\langle f, \frac{g}{\|g\|}\rangle|^2 = \frac{|\langle f,g\rangle|^2}{\|g\|^2}. \quad \blacksquare$$

Nous pouvons maintenant démontrer la continuité du produit scalaire:

Supposons $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{} f$ et $g_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{} g$

(i.e., $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$ tq $\forall n > N$: $\|f_n - f\| < \varepsilon$).

Alors: $|\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle|$

$= |\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g_n\rangle + \langle f, g_n\rangle - \langle f, g\rangle|$

$= |\langle f_n - f, g_n\rangle + \langle f, g_n - g\rangle|$

$\leq |\langle f_n - f, g_n\rangle| + |\langle f, g_n - g\rangle|$

$\leq \|f_n - f\|\,\|g_n\| + \|g_n - g\|\,\|f\| \longrightarrow 0 \quad \blacksquare$

Théorème: Tout espace préhilbertien $\mathcal{P}$ est un e.v.n. avec la norme définie par

$$(*) \qquad \|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

Démonstration: Comme $\mathcal{P}$ est un e.v., il suffit de vérifier que la norme dans $(*)$ a toutes les propriétés de la norme. Vérifions l'inégalités du triangle: (Les autres propriétés se démontrent facilement)

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle \\ &= \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle \\ &= \langle f,f\rangle + 2\,\mathrm{Re}\{\langle f,g\rangle\} + \langle g,g\rangle \\ &\leq \|f\|^2 + 2|\langle f,g\rangle| + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2. \end{aligned}$$ ∎

Nous avons donc une métrique naturelle sur $\mathcal{P}$:

$$d(f,g) = \sqrt{\langle f-g, f-g\rangle}$$

Nous pouvons alors introduire les notions comme convergence, complétude, densité qui sont définies pour les espaces métriques.

<u>Définition:</u> Un espace préhilbertien complet (pour la norme associée) s'appelle un <u>espace de Hilbert</u>.

Inversement à (*), i.e. à la caractérisation des normes susceptibles d'être ainsi définies par un produit scalaire, le calcul du produit scalaire à l'aide de la norme est fourni par le théorème suivant:

<u>Théorème:</u> Pour qu'on puisse munir un e.v.n. V d'un produit scalaire qui en fasse un espace préhilbertien, il faut et il suffit que pour tout couple (f,g) d'éléments de V, la norme sur V vérifie l'égalité du parallélogramme:

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2). \qquad (1)$$

Le produit scalaire est alors donné par

$$4\langle g,f\rangle=\|f+g\|^2-\|f-g\|^2+i\|f+ig\|^2-i\|f-ig\|^2$$

si le corps des scalaires est $\mathbb{C}$, et

$$4\langle f,g\rangle=\|f+g\|^2-\|f-g\|^2$$

si le corps des scalaires est $\mathbb{R}$.

Considérons maintenant deux exemples classiques d'espaces qui ne sont pas d'espaces préhilbertiens:

1) <u>l'espace l^p ($p\in\mathbb{N}^*$)</u>:

C'est l'espace de suites $x=(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de nombres complexes telles que

$$\|x\|_p:=\Big[\sum_{j\in\mathbb{N}^*}|\xi_j|^p\Big]^{1/p}<\infty \qquad (2)$$

On peut démontrer que l^p est un espace de Banach par rapport à la norme (2). Mais, cette norme ne peut pas être obtenue d'un produit scalaire! En effet, soit

$$x=(1,1,0,0,\dots,0,\dots)\in l^p$$
$$y=(1,-1,0,0,\dots,0,\dots)\in l^p$$

$$\|x\|_p=\|y\|_p=2^{1/p}\,,\quad \|x\pm y\|_p=2.$$

Alors (1) n'est pas satisfaite si $p\neq 2$. l^p, $p\neq 2$, est un espace de Banach, mais il n'est pas un espace de Hilbert.

Nous avons la même confirmation pour l'exemple suivant:

2) L'espace $\mathcal{C}[a,b]$:

C'est l'espace de fonctions à valeur réelle, définies et continues sur l'intervalle $[a,b]$.
Nous définissons la structure d'e.v. par

$$\left.\begin{array}{l}\forall x,y\in\mathcal{C}[a,b]\\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}(x+y)(t)=x(t)+y(t)\ \in\mathcal{C}[a,b]\\ (\alpha x)(t)=\alpha x(t)\ \in\mathcal{C}[a,b]\end{array}$$

C'est un espace de Banach par rapport à la norme définie par

$$\|x\| := \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|, \qquad (3)$$

mais cette norme ne satisfait pas à l'identité de parallélogramme! En effet, si nous prenons

$$x(t)=1, \qquad y(t)=\frac{t-a}{b-a},$$

alors $\|x\|=1=\|y\|$,

et
$$x(t)+y(t)=1+\frac{t-a}{b-a}$$
$$x(t)-y(t)=1-\frac{t-a}{b-a}$$

Donc : $\|x+y\|=2$, $\|x-y\|=1$ et

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5\neq 4=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

Conclusion: $\mathcal{C}[a,b]$ n'est pas un espace pré-hilbertien par rapport à la norme (3).

Voici deux exemples canoniques des espaces de Hilbert:

Exemple: Nous définissons $L^2[a,b]$ comme l'ensemble des fonctions mesurables sur $[a,b]$, à valeurs complexes, et satisfaisant:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty .$$

Nous y définissons un produit scalaire par:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx \quad \forall f, g \in L^2[a,b]$$

On remarque que ce produit scalaire est bien défini, car:

$$|\overline{f(x)} g(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|^2 + \frac{1}{2}|g(x)|^2$$

$$\Rightarrow \overline{f} g \in L^1[a,b].$$

On peut démontrer que $L^2[a,b]$ est complet; i.e. il est un espace de Hilbert. En fait, il est la complétion de $C[a,b]$ par rapport à la norme

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} .$$

Exemple: Nous définissons l_2 comme l'ens. des suites $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres complexes satisfaisant

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

avec un produit scalaire défini par:

$$\langle \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n .$$

On peut démontrer que tout espace hilbertien $\mathcal{H}$ ayant un ensemble dénombrable (infini) dense est isomorphe à l_2. Dans ce sens, l_2 est l'exemple canonique d'un espace de Hilbert.

Théorème : Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, & soit F un sous e.v. de $\mathcal{H}$. Pour que F soit un espace de Hilbert, il faut et il suffit que F soit fermé.

Rmq: Ce résultat n'est pas spécifique aux espaces de Hilbert: Un sous-espace vectoriel d'un espace de Banach est lui-même de Banach ssi il est fermé.

Rmq: Ce résultat n'est pas spécifique aux espaces de Hilbert: Un sous-espace vectoriel d'un espace de Banach est lui-même de Banach ssi il est fermé.

Démonstration: Supposons d'abord F fermé. Nous devons montrer que toute suite de Cauchy (u_j) d'éléments de F converge dans F. Cette suite est aussi de Cauchy dans $\mathcal{H}$, et elle converge donc vers $u \in \mathcal{H}$. Mais puisque F est fermé, nous avons $u \in F$, ce qui nous permet de conclure que F est complet.

Réciproquement, supposons que F soit un espace de Hilbert, et soit $u \in \overline{F}$. $\exists$ donc une suite (u_j) d'éléments de F qui converge vers u. Cette suite qui converge dans $\mathcal{H}$ est donc de Cauchy. Elle est de Cauchy dans F, & doit donc converger vers un élément de F qui, par l'unicité de la limite ne peut être que u. On a donc montré le résultat. $F = \overline{F}$. ☒

Supplémentaire Orthogonal, Théorème de Projection

Définition: Soit S une partie non-vide d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Un élément $f \in \mathcal{H}$ est orthogonal à S, noté $f \perp S$ si nous avons

$$\langle f, \Phi \rangle = 0 \qquad \forall \Phi \in S.$$

L'ensemble de tous les éléments de $\mathcal{H}$ orthogonaux à S, noté $S^{\perp}$, s'appelle supplémentaire orthogonal de S.

Le supplémentaire orthogonal de $S^{\perp}$ est noté par $S^{\perp\perp} = (S^{\perp})^{\perp}$.

Si $f \perp h$ $\forall h \in \mathcal{H}$, alors $f = 0$; on a $\mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$. D'une façon similaire $\{0\}^{\perp} = \mathcal{H}$. Deux parties A et B d'un espace de Hilbert sont orthogonales si $\forall f \in A$ et $\forall g \in B$ on a $f \perp g$. (On notera alors $A \perp B$).

Le théorème suivant est très important dans les applications:

Théorème (de vecteur minimisant): Soit $\mathcal{M}$ un sous espace fermé d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit $h \in \mathcal{H}$. Alors $\exists! g \in \mathcal{M}$ tq g soit l'élément le plus proche de h. Plus précisément: $\forall h \in \mathcal{H}$, $\exists! g \in \mathcal{M}$:

$$\|h - g\| = \inf_{\xi \in \mathcal{M}} \|h - \xi\| \qquad (4)$$

Démonstration: Soit $d := \inf_{\xi \in \mathcal{M}} \|h - \xi\|$. Soit $\{\xi_n\}$,

$\xi_n \in \mathcal{M}$, une suite tq

$$\|h - \xi_n\| \longrightarrow d.$$

Par l'identité de parallélogramme, on a:

$$\|\xi_n - \xi_m\|^2 = \|(\xi_n - h) - (\xi_m - h)\|^2$$

$$= 2\|\xi_n - h\|^2 + 2\|\xi_m - h\|^2 - \|-2h + \xi_n + \xi_m\|^2$$

$$= 2\|\xi_n - h\|^2 + 2\|\xi_m - h\|^2 - 4\|h - \tfrac{1}{2}(\xi_n + \xi_m)\|^2$$

Or, puisque $\frac{1}{2}\xi_n + \frac{1}{2}\xi_m \in \mathcal{M}$, nous avons

$$\|h - \tfrac{1}{2}(\xi_n + \xi_m)\| \geq d.$$

Par conséquent:

$$\|\xi_n - \xi_m\|^2 \leq 2[\|\xi_n - h\|^2 + \|\xi_m - h\|^2] - 4d^2$$

Or,

$$2[\|\xi_n - h\|^2 + \|\xi_m - h\|^2] \longrightarrow 4d^2$$

quand $n, m \to \infty$; ce qui nous permet de conclure que

$$\|\xi_n - \xi_m\|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n, m \to \infty,$$

i.e., que $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy. Puisque $\mathcal{H}$ est complet et $\mathcal{M}$ est fermé (& ∴ complet!), la limite $\lim_{n\to\infty} \xi_n = g$ existe, et $g \in \mathcal{M}$. Par la continuité de la norme, nous avons:

$$\|h - g\| = \|h - \lim_{n\to\infty} \xi_n\| = \lim_{n\to\infty} \|h - \xi_n\| = d.$$

Ceci achève la démonstration de l'existence de $g \in \mathcal{M}$ satisfaisant (4).

Prouvons l'unicité: Supposons qu'il existe un autre élément $\tilde{g} \in \mathcal{M}$ qui satisfait (4). Or, $\frac{1}{2}(g + \tilde{g}) \in \mathcal{M}$, et nous avons:

$$\|g-\tilde{g}\|^2 = 4d^2 - 4\left\|h - \frac{g+\tilde{g}}{2}\right\|^2 \leq 0$$

ce qui n'est possible que si $g=\tilde{g}$. ▨

Théorème (de projection orthogonale):
Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors, tout élément $h\in\mathcal{H}$ a une décomposition unique de la forme

$$h = g+f, \quad \text{où } g\in\mathcal{M} \text{ et } f\in\mathcal{M}^\perp.$$

Démonstration: Soit $h\in\mathcal{H}$. Par le théorème du vecteur minimisant $\exists!\, g\in\mathcal{M}$ qui est le plus proche de h. Nous définissons $f=h-g$, & on a bien évidemment $h=f+g$. Soit $\xi\in\mathcal{M}$, et $\alpha\in\mathbb{R}$. Si $d:=\|h-g\|$, alors

$$d^2 \leq \|h-(g+\alpha\xi)\|^2 = \|f-\alpha\xi\|^2$$
$$= d^2 - 2\alpha\,\mathrm{Re}\langle f,\xi\rangle + \alpha^2\|\xi\|^2$$

i.e. $\|\xi\|^2\alpha^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle f,\xi\rangle\alpha \geq 0$,
ceci, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, & $\therefore \mathrm{Re}\langle f,\xi\rangle = 0$.
Remplaçons α par $i\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$; il vient:

$$d^2 \leq \|h-(g+i\alpha\xi)\|^2 = \|f-i\alpha\xi\|^2$$
$$= \langle f-i\alpha\xi, f-i\alpha\xi\rangle$$
$$= d^2 - i\alpha\langle f,\xi\rangle + i\alpha\langle\xi,f\rangle + \alpha^2\|\xi\|^2$$
$$= d^2 - i\alpha[2i\,\mathrm{Im}\langle f,\xi\rangle] + \alpha^2\|\xi\|^2$$

i.e. $\|\xi\|^2\alpha^2 + 2\,\mathrm{Im}\langle f,\xi\rangle\alpha \geq 0$
$\forall\alpha\in\mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Im}\langle f,\xi\rangle = 0$. On a donc

$$\langle f,\xi\rangle = 0 \qquad \forall\xi\in\mathcal{M}$$

et par conséquent $f \in \mathcal{M}^\perp$.

Pour démontrer l'unicité, on remarque que si $h = f_1 + g_1$ avec $f_1 \in \mathcal{M}^\perp$ et $g_1 \in \mathcal{M}$, alors $f - f_1 \in \mathcal{M}^\perp$ et $g - g_1 \in \mathcal{M}$. Puisque $f - f_1 = g_1 - g$, il faut que $f - f_1 = g_1 - g = 0$ (car $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$). ▨

Théorème: Si S est un sous espace fermé d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, alors $S^{\perp\perp} = S$.

Démonstration: Si $f \in S$, alors $\forall g \in S^\perp$ on a $\langle f, g \rangle = 0$, qui $\Rightarrow S \subset S^{\perp\perp}$.

Pour démontrer que $S^{\perp\perp} \subset S$, considérons un élément $f \in S^{\perp\perp}$ qqe. Puisque S est fermé,

$$f = m + g, \text{ où } m \in S, g \in S^\perp.$$

Puisque $S \subset S^{\perp\perp}$, $m \in S^{\perp\perp}$ et donc $g = f - m \in S^{\perp\perp}$, car $S^{\perp\perp}$ est un sous espace vectoriel. Mais $g \in S^\perp$; donc il faut que $g \equiv 0$, qui $\Rightarrow f = m \in S$. Donc on a $S^{\perp\perp} \subset S$. ▨

Rappelons que pour $A \subset \mathcal{H}$, on note $\mathrm{Vec}(A)$ l'e.v. <u>engendré</u> par A, i.e. l'ens. des éléments de $h \in \mathcal{H}$ qui sont combinaison linéaire des éléments de A:

$$h = \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \alpha_j v_j, \qquad \alpha_j \in \mathbb{C}, \ v_j \in A.$$

Définition: On dit que $A \subset \mathcal{H}$ est total si $\mathrm{Vec}(A)$ est dense dans $\mathcal{H}$, i.e. si $\overline{\mathrm{Vec}(A)} = \mathcal{H}$.

Corollaire (Critère de totalité):

$A \subset \mathcal{H}$ est total $\Leftrightarrow A^\perp = \{0\}$.

Démonstration: Notons F le sous espace vectoriel fermé $\overline{Vec(A)}$, et montrons que $A^\perp = F^\perp$: Tout vecteur $\perp$ aux éléments de F est en particulier $\perp$ aux éléments de A. (i.e. $F^\perp \subset A^\perp$)

Réciproquement, si $g \in A^\perp$, on a

$$\langle g, \sum_j \alpha_j v_j \rangle = 0 \qquad v_j \in A \ \forall j$$

et g est $\perp$ aux éléments de $Vec(A)$. Tout élément f de F est limite d'une suite $\{f_k\}$ d'éléments de $Vec(A)$; on a donc

$$0 = \langle f_k, g \rangle \longrightarrow \langle f, g \rangle \Rightarrow g \in F^\perp.$$

Par définition, A est total si $F = \mathcal{H}$, ce qui est $\Leftrightarrow$ à $F^\perp = \{0\}$, et donc à $A^\perp = \{0\}$. ▨

Remarque: La démonstration qui précède a montré + généralement que $\forall$ sous ensemble $A \subset \mathcal{H}$, on a

$$(A^\perp)^\perp = \overline{Vec(A)}.$$

Il est utile de comparer la notion de sous-ensemble (dit aussi système) total à la notion algébrique de partie génératrice (ou système de générateurs): On sait que $G \subset \mathcal{H}$ est un système de générateurs si $Vec(G) = \mathcal{H}$, i.e. si tout élément de $\mathcal{H}$ est combinaison linéaire d'éléments de G.

Pour un système total A, on demande seulement que Vec(A) soit partout dense ou encore, de façon imagée, que tout élément de $\mathcal{H}$ soit "à ε près" combinaison linéaire d'éléments de A.

- En dimension finie, où tous les sous-espaces sont fermés, les deux notions coïncident.
- En dimension infinie, (et en particulier pour les espaces L^2) c'est la notion de système total qui joue le rôle le + important.

Théorème: (de Riesz) Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. A tout élément $h \in \mathcal{H}$, on peut faire correspondre une forme linéaire continue L_h définie par

$$L_h(f) := \langle h, f \rangle .$$

Réciproquement, étant donné une forme linéaire continue, L, sur $\mathcal{H}$, il existe un et un seul $h \in \mathcal{H}$, tq l'on ait $L = L_h$.

Démonstration: Pour $f \in \mathcal{H}$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|L_h(f)| = |\langle h, f \rangle| \leq \|h\|_{\mathcal{H}} \|f\|_{\mathcal{H}} ,$$

ce qui exprime la continuité de L_h.

Soit maintenant L une forme linéaire continue et soit $F = L^{-1}(0)$ son noyau. C'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{H}$ qui est fermé du fait que L est continue. On peut supposer que L n'est pas $\equiv 0$. (Sinon, on a $L = L_0$) On a alors $F \neq \mathcal{H}$, et $F^\perp$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $g \in F^\perp$, $g \neq 0$. Il n'appartient pas à F, et donc $L(g) \neq 0$.

Il n'appartient pas à F, et donc $L(g) \neq 0$. $\forall f \in \mathcal{H}$ on peut poser

$$f = \frac{L(f)}{L(g)} g + \left(f - \frac{L(f)}{L(g)} g \right) =: f_1 + f_2$$

et on remarque que le second terme, qui vérifie $L(f_2) = 0$, appartient à F, tandis que $f_1 \in F^\perp$. En faisant le produit scalaire avec g, on obtient

$$\langle g, f \rangle = \frac{L(f)}{L(g)} \|g\|^2 + 0.$$

Il suffit maintenant de poser $h = \overline{\frac{L(g)}{\|g\|^2}} g$, et on obtient:

$$L(f) = \langle h, f \rangle \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Cela montre donc que $L = L_h$.

Prouvons l'unicité: Si $L_{h_1} = L_{h_2}$, alors $h_1 - h_2$ est $\perp$ à tout élément de $\mathcal{H}$, il est donc nul. ∎

Le résultat suivant est un prérequis pour le cours d'analyse numérique (AN11), où il trouve nombreuses applications:

<u>Théorème (de Lax-Milgram)</u>: Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire sur l'espace de Hilbert <u>réel</u> $\mathcal{H}$. On suppose que:

i) a est <u>continue</u> (ou <u>bornée</u>), i.e., $\exists$ une cte $C \geq 0$ tq $\forall u, v \in \mathcal{H}$, on a

$$|a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\| ;$$

ii) a est <u>coercive</u>, i.e., $\exists \alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tq $\forall u \in \mathcal{H}$:

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Il existe alors un opérateur linéaire A, continu et bijectif de $\mathcal{H}$ dans lui-même tq

$$a(u,v) = \langle Au, v \rangle \qquad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

De plus, l'opérateur inverse A^{-1} est de norme majorée par α^{-1}.

<u>Démonstration:</u>

• Pour $u \in \mathcal{H}$, l'hypothèse i) $\Rightarrow$ l'application linéaire qui à $v \in \mathcal{H}$ associe $a(u,v)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$. Par le théorème de Riesz, l'élément Au et par suite l'opérateur A sont bien définis; la linéarité de A étant conséquence de la bilinéarité de la forme $a(\cdot,\cdot)$. On voit aussi que la norme de A est majorée par C, donc $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

• A est injectif, car l'hypothèse ii) $\Rightarrow$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\alpha \|u\|^2 \leq a(u,u) = \langle Au, u \rangle \leq \|Au\| \|u\|$$

et donc $\alpha \|u\| \leq \|Au\|$. L'injectivité de A suit alors du fait que $Au = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

• Il reste à montrer que A est surjectif. A cet effet, démontrons que $\mathrm{Im}(A)$ est dense & fermée.

<u>$\mathrm{Im}(A)$ est fermée:</u> car l'inégalité précédente $\alpha \|u\| \leq \|Au\| \Rightarrow$ que si la suite $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}$, il en est de même de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Im(A) est dense: Soit en effet $v \in \mathcal{H}$ tel que $v \perp \mathrm{Im}(A)$. On a en particulier :

$$0 = \langle Av, v \rangle \geqslant \alpha \|v\|^2,$$

donc $v \equiv 0$, ce qui démontre que Im(A) est dense [Rappelons que si A est une partie de $\mathcal{H}$, le sous-e.v. engendré par A est dense dans $\mathcal{H}$ ssi $A^\perp = \{0\}$].

· L'inégalité $\alpha \|u\| \leqslant \|Au\|$ implique (on fait un chgt. de var : $u = A^{-1}v$) la dernière assertion du théorème. ▨

Bases hilbertiennes

Définition: On dit qu'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est séparable s'il existe un ensemble dénombrable total dans $\mathcal{H}$. On appelle base hilbertienne (ou base orthonormale) de $\mathcal{H}$ (séparable) une suite finie/infinie (e_j), $j \in \mathbb{N}^*$, qui constitue un système total dans $\mathcal{H}$, et qui vérifie les relations d'orthonormalité :

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ si } j=k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Dans tout espace de Hilbert, il existe des bases hilbertiennes.

Nous avons déjà vu qu'un espace de Hilbert est en particulier un espace de Banach, et une série normalement cvgte (i.e. $\sum_j \|u_j\| < \infty$) y est donc convergente ; c'est bien ce que nous rappelons dans la première partie du résultat

ci-dessous. La seconde partie, où la condition portant sur les normes est moins forte, est spécifique aux espaces de Hilbert:

Proposition: Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et (u_j) une suite d'éléments de $\mathcal{H}$.

(i) Si la série de terme générale u_j est normalement cvgte, alors la série $\sum_{j\in\mathbb{N}^*} u_j$ converge dans $\mathcal{H}$.

(ii) Supposons les u_j deux à deux $\perp$. Pour que la série $\sum_{j\in\mathbb{N}^*} u_j$ soit cvgte, il faut et il suffit que la série $\sum_{j\in\mathbb{N}^*} \|u_j\|^2$ soit cvgte. On a alors:

$$\left\| \sum_{j\in\mathbb{N}^*} u_j \right\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}^*} \|u_j\|^2$$

Démonstration: Supposons la série $S := \sum_{j\in\mathbb{N}^*} u_j$ cvgte et posons

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} u_j .$$

D'après le théorème de Pythagore, on a:

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^2 = \|S_N\|^2 .$$

Le second membre converge vers $\|S\|^2$ par continuité de la norme, ce qui entraîne que la série numérique $\sum_{j\in\mathbb{N}^*} \|u_j\|^2$ converge.

Réciproquement, si cette série numérique cvge, nous avons,

$$\|S_{N+p} - S_N\|^2 = \sum_{j=N+1}^{N+p} \|u_j\|^2 \leq \sum_{j=N+1}^{+\infty} \|u_j\|^2 ,$$

où le membre de droite est le reste à l'ordre N d'une série numérique cvgte, et tend donc vers 0 avec $N \to \infty$. Cela assure que la suite S_N est de Cauchy dans $\mathcal{H}$, & donc cvgte. ▨

Théorème: Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, et $(e_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$, une base hilbertienne de $\mathcal{H}$.
(i) Tout élément $f\in\mathcal{H}$ peut se décomposer de façon unique sous forme d'une série cvgte dans $\mathcal{H}$:

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}^*} c_j(f)\, e_j \,, \qquad c_j(f)\in\mathbb{C}.$$

Les composantes $c_j(f)$ sont données par:

$$(*) \qquad c_j(f) = \langle e_j, f\rangle$$

et vérifient

$$\|f\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}^*} |c_j(f)|^2 \quad \text{(Bessel-Parseval)}$$

(ii) Réciproquement, étant donnés des scalaires γ_j vérifiant $\sum_{j\in\mathbb{N}^*} |\gamma_j|^2 < \infty$, la série $\sum_{j\in\mathbb{N}^*} \gamma_j e_j$ converge dans $\mathcal{H}$ et sa somme f vérifie $c_j(f) = \gamma_j$ $\forall j\in\mathbb{N}^*$.

Démonstration: Dans la partie (ii) le fait que la série converge est un cas particulier de la Propos^n précédente, les $\gamma_j e_j$ étant $\perp$ et de norme $|\gamma_j|$.

On obtient le reste du point (ii) et du même coup l'unicité de la décomposition et la nécessité des formules (*): Si la série $\sum_{j\in\mathbb{N}^*} \gamma_j e_j$ converge

vers f, par continuité du produit scalaire, on a :

$$\langle e_k, \sum_{j=1}^{N} \gamma_j e_j \rangle \longrightarrow \langle e_k, f \rangle ,$$

et le membre de gauche est égal à γ_k dès que $N \geq k$.

Soit enfin $f \in \mathcal{H}$, posons $c_j = \langle e_j, f \rangle$ et $f_N = \sum_{j=1}^{N} c_j(f)\, e_j$. On a :

$$\begin{aligned} \langle f_N, f \rangle &= \Big\langle \sum_{j=1}^{N} c_j(f) e_j, f \Big\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N} \overline{c_j(f)} \langle e_j, f \rangle = \sum_{j=1}^{N} |c_j(f)|^2 \\ &= \| f_N \|^2 \quad \text{(par le Thm. de Pythagore)} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\| f_N \|^2 = \langle f_N, f \rangle \leq \| f_N \| \, \| f \| .$$

Cela prouve que $\| f_N \|^2$ est majoré $\forall N \in \mathbb{N}^*$ par $\| f \|^2$, et donc, que la série $\sum_j |c_j(f)|^2$ est cvgte. Une nouvelle application de la Propos^n précédente assure que la série $\sum_j c_j(f)\, e_j$ converge vers un élément $g \in \mathcal{H}$. $\forall j \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\langle e_j, g - f \rangle = c_j(f) - c_j(f) = 0 ,$$

et l'élément $g - f$ qui est $\perp$ à un système total est nécessairement nul, d'où l'unicité de la limite. ▨

Exemple de bases orthonormées : L'ondelette de Haar

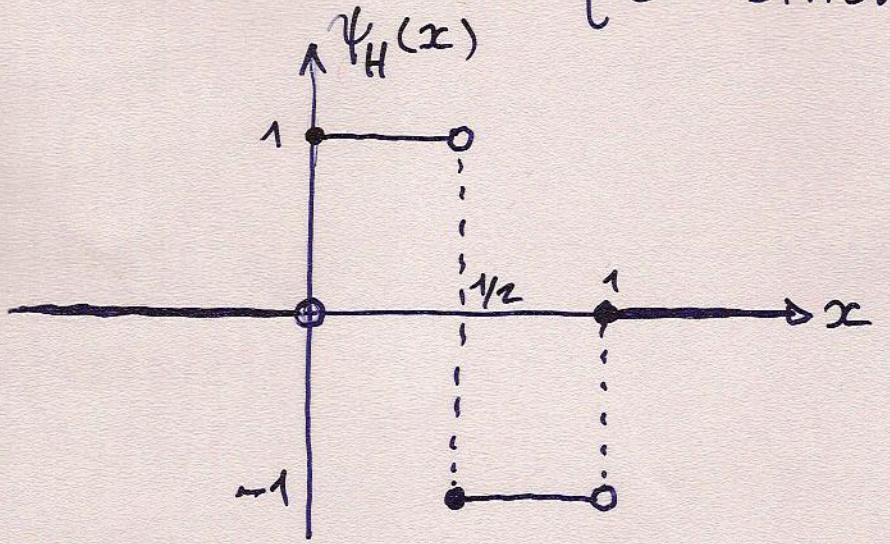
En 1910, le mathématicien hollandais Alfred Haar fut le premier à proposer un système orthonormé complet pour l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$.

Dans le même article il montra que cet espace est isomorphique à l'espace des suites de carré-sommables :

$$l_2 = \left\{ (c_k \mid k \in \mathbb{N}) : \sum_{k \in \mathbb{N}} |c_k|^2 < \infty \right\}.$$

L'ondelette de Haar est définie par la fonction suivante :

$$\psi_H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ -1 & \text{si } x \in [1/2, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



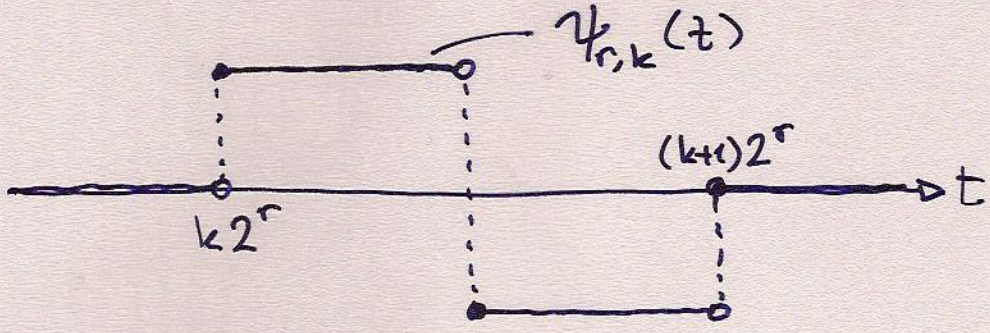
Nous avons : $\int_{\mathbb{R}} \psi_H(x)\,dx = 0$; $\|\psi_H\|_2 = 1$.

En utilisant l'ondelette de Haar, nous pouvons engendrer des fonctions d'ondelettes :

$$\forall r, k \in \mathbb{Z}, \quad \psi_{r,k}(t) = 2^{-\frac{r}{2}} \psi_H\left(\frac{t - k2^r}{2^r}\right)$$

Nous avons $\mathrm{Supp}(\psi_{r,k}) \subseteq I_{r,k} := [k2^r, (k+1)2^r]$

dont la longueur est 2^r. Grandes valeurs de r correspondent aux intervalles plus larges, et les ondelettes correspondantes, $\psi_{r,k}$, représentent des "ondes" plus étendues:



On choisit l'amplitude de $\psi_{r,k}$ tq

$$\|\psi_{r,k}\|^2 := \int_{\mathbb{R}} |\psi_{r,k}(t)|^2 dt = 1 \quad \forall r,k \in \mathbb{Z}.$$

En fait, on a le résultat suivant:

<u>Proposition:</u> Les fonctions $\psi_{r,k}$ $(r,k \in \mathbb{Z})$ forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$.

Opérateur Adjoint dans un Espace de Hilbert

Opérateur adjoint nous permet de définir trois classes importantes d'opérateurs:

- auto-adjoint
- unitaire
- normal.

Ces opérateurs sont souvent utilisés dans les applications, car ils ont des propriétés remarquables.

<u>Définition:</u> Soit $T: \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un opérateur linéaire borné ($\Leftrightarrow T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$), où $\mathcal{H}_i$, $i=1,2$,

sont des espaces de Hilbert. Alors l'opérateur adjoint est l'opérateur

$$T^* : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$$

tel que $\forall f \in \mathcal{H}_1$ et $\forall g \in \mathcal{H}_2$

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^* g \rangle \qquad (1)$$

Théorème (Existence): T^* existe, il est unique, et borné, avec la norme

$$\|T^*\| = \|T\| \left(:= \sup_{x : \|x\|=1} \|Tx\| \right)$$

Lemme (Opérateur zéro): Soient X et Y espaces préhilbertiens, et $Q \in \mathcal{B}(X,Y)$. Alors:

(i) $Q = 0$ ssi $\langle Qx, y \rangle = 0 \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$.

(ii) Si $Q \in \mathcal{B}(X)$, avec X complexe, et $\langle Qx, x \rangle = 0 \quad \forall x \in X$, alors $Q = 0$.

Voici quelques propriétés générales des opérateurs adjoints:

Théorème: Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ espaces de Hilbert, $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, et $\alpha \in \mathbb{K}$ quelconque. Alors nous avons:

(i) $\langle T^* f, g \rangle = \langle f, Tg \rangle \qquad (g \in \mathcal{H}_1, f \in \mathcal{H}_2)$

(ii) $(S+T)^* = S^* + T^*$

(iii) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

(iv) $(T^*)^* = T$

(v) $\|T^* T\| = \|T T^*\| = \|T\|^2$

(vi) $(ST)^* = T^* S^* \qquad$ (on suppose $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$)

Définition: $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ s'appelle:
- **auto-adjoint** si $T^* = T$
- **unitaire** si T est bijectif et $T^* = T^{-1}$
- **normal** si $TT^* = T^*T$.

Remarques:
(i) Si T est auto-adjoint, (1) devient:

$$\langle f, Tg \rangle = \langle Tf, g \rangle.$$

(ii) Si T est auto-adjoint ou unitaire, alors T est normal. Mais un opérateur normal n'est pas nécessairement auto-adjoint ni unitaire. Comme exemple, si $\mathbb{1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est l'opérateur identité, alors $T := 2i\mathbb{1}$ est normal car $T^* = -2i\mathbb{1}$, et donc $TT^* = T^*T = 4\mathbb{1}$, mais $T^* \neq T$, ni $T^* = T^{-1} = -\frac{1}{2}i\mathbb{1}$.

Voici un critère important et utile pour vérifier si un opérateur est auto-adjoint:

Théorème: Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors:
(i) Si T est auto-adjoint alors $\langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathcal{H}$
(ii) Si $\mathcal{H}$ est **complexe** et $\langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathcal{H}$, alors T est auto-adjoint.

Démonstration:
(i) Si T est auto-adjoint, alors $\forall x \in \mathcal{H}$:

$$\overline{\langle x, Tx \rangle} = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle.$$

(ii) Si $\langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathcal{H}$, alors

$$\langle x, Tx \rangle = \overline{\langle x, Tx \rangle} = \overline{\langle T^*x, x \rangle} = \langle x, T^*x \rangle$$

Donc: $\langle x, (T - T^*)x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

Donc $T - T^* = 0$ par le lemme d'opérateur zéro. ∎

Remarque: Dans la preuve de (ii) il est nécessaire que $\mathcal{H}$ soit complexe; car, si $\mathcal{H}$ est réel le $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R}$ sans aucune autres hypothèses sur l'opérateur T.

Théorème: Soit $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ auto-adjoints. Alors ST est auto-adjoint ssi les operateurs commutent:

$$ST = TS$$

Démonstration: Nous avons

$$(ST)^* = T^* S^* = TS$$

Donc:

$$ST = (ST)^* \Leftrightarrow ST = TS. \quad \square$$

Théorème (Opérateur Unitaire): Soient $U: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ et $V: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ opérateurs unitaires. Alors:

(i) U est isométrique : i.e. $\|Uf\| = \|f\| \quad \forall f \in \mathcal{H}$;
(ii) $\|U\| = 1$, pourvu que $\mathcal{H} \neq \{0\}$;
(iii) $U^{-1} (= U^*)$ est unitaire;
(iv) UV est unitaire;
(v) U est normal;

De plus:

(vi) $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H}$ complexe) est unitaire ssi T est une isométrie surjective.

Spectre d'un opérateur borné auto-adjoint

Nous considérons opérateurs auto-adjoints dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert complexe. Le spectre d'un opérateur borné auto-adjoint T est réel, et se trouve dans l'intervalle $[m, M]$, où

$$m = \inf_{x:\|x\|=1} \langle x, Tx \rangle \quad \text{et} \quad M = \sup_{x:\|x\|=1} \langle x, Tx \rangle$$

Remarque: Un opérateur linéaire borne auto-adjoint, T, peut ne pas avoir de valeurs propres. Mais si T possède des valeur propres, alors on peut établir les propriétés suivantes:

Théorème: Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ auto-adjoint, avec $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe. Alors:

(i) Toutes les valeurs propres de T (si elles existent) sont réelles.
(ii) Les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres différentes de T sont $\perp$.

Démonstration:
(i) Soit λ une valeur propre arbitraire de T, avec le vecteur propre correspondant f. Alors $f \neq 0$, et $Tf = \lambda f$. Or, puisque T est auto-adjoint:

$$\begin{aligned} \lambda \langle f, f \rangle = \langle f, \lambda f \rangle &= \langle f, Tf \rangle \\ &= \langle Tf, f \rangle = \langle \lambda f, f \rangle = \bar{\lambda} \langle f, f \rangle \end{aligned}$$

Puisque $f \neq 0$, $\langle f, f \rangle = \|f\|^2 \neq 0$, et donc $\lambda = \bar{\lambda}$.

(ii) Soient λ et μ deux valeurs propres de T, et f & g les vecteurs propres correspondants. Alors $Tf = \lambda f$, et $Tg = \mu g$. Puisque T est auto-adjoint et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ par la partie (i), nous avons:

$$\begin{aligned} \lambda \langle f, g \rangle = \langle \lambda f, g \rangle &= \langle Tf, g \rangle \\ &= \langle f, Tg \rangle = \langle f, \mu g \rangle = \mu \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

Comme $\lambda \neq \mu$, $\langle f, g \rangle = 0$, i.e. $f \perp g$. ▨

Définition: Le spectre de T, noté $\sigma(T)$, est l'ensemble de valeurs propres de T.

Théorème: Le spectre $\sigma(T)$ d'un opérateur linéaire borné auto-adjoint $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H}$ complexe) se trouve dans l'intervalle fermé $[m, M]$ de la droite réelle, où:

$$m = \inf_{x:\|x\|=1} \langle x, Tx \rangle, \text{ et } M = \sup_{x:\|x\|=1} \langle x, Tx \rangle.$$